第 3 节 外接球问题（★★★）

内容提要

本节归纳外接球问题，有四大模型，下面分别分析.

1．长方体模型：如图 1，长、宽、高分别为 a，b，c 的长方体的外接球半径 $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，除了标准的长方体（包括正方体）之外，还有下面的两个三棱锥模型，也常通过补形转化为长方体模型来处理.

①垂直模型：如图 2 和图 3，其共同特征是过直角 ΔABC 的一个顶点（图 2 是直角顶点，图 3 是斜边端点）作垂直于平面 ABC 的线段，这一特征可作为解题时识别模型的依据.

②对棱相等模型：如图 4，三棱锥 $S-ABC$ 满足三组相对棱相等，即 $AB=SC$，$AC=SB$，$BC=SA$，则该三棱锥也可补形为长方体处理.

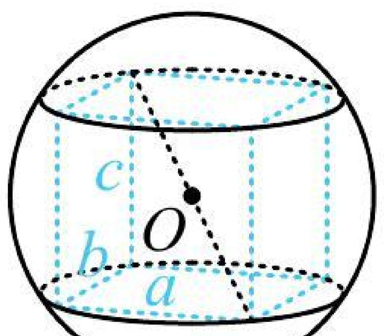


图1

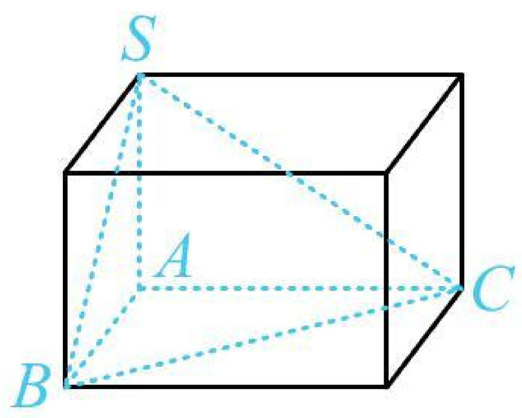


图2

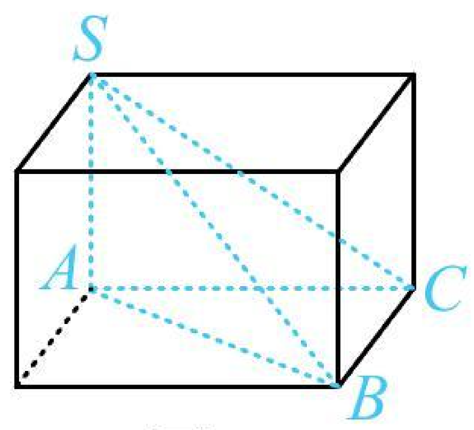


图3

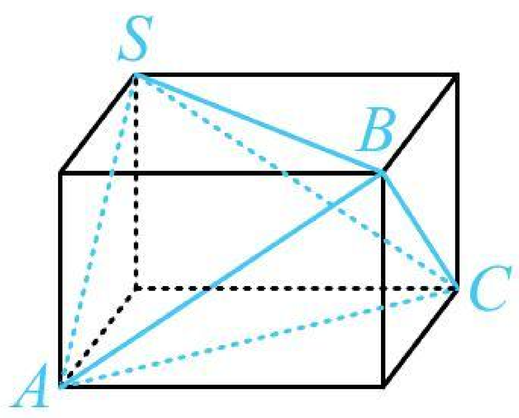


图4

2．圆柱模型：如图 5，圆柱的底面半径 r，高 h 和球的半径 R 满足 $r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2$．除了标准的圆柱模型外，还有一些模型也可转化为圆柱模型处理.

①线面垂直的三棱锥：如图 6，$SA\perp$ 平面 ABC，若 ΔABC 是直角三角形，则按上面 1 中的长方体模型处理最方便，若不是直角三角形，则可先将三棱锥 $S-ABC$ 放入圆柱，按圆柱模型处理.

②直三棱柱：如图 7 所示的直三棱柱也可按圆柱模型处理，本质上和图 6 的模型相同.

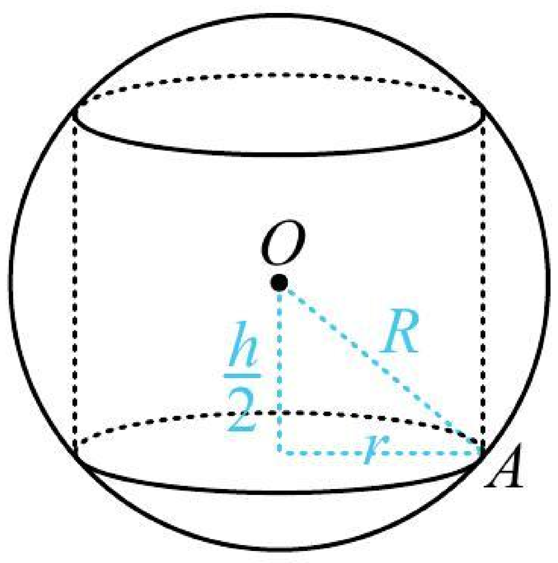


图5

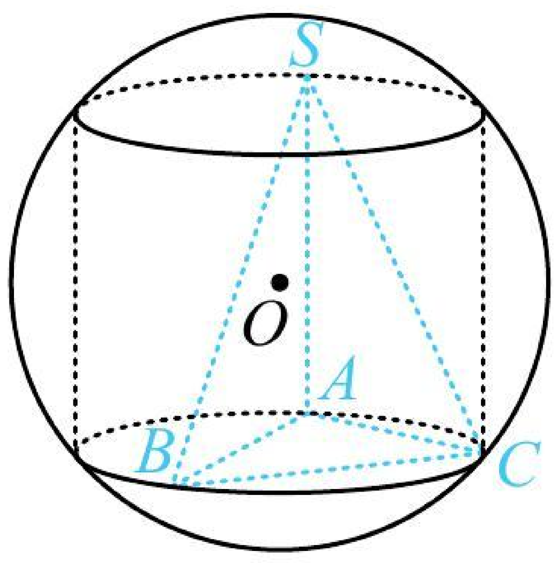


图6

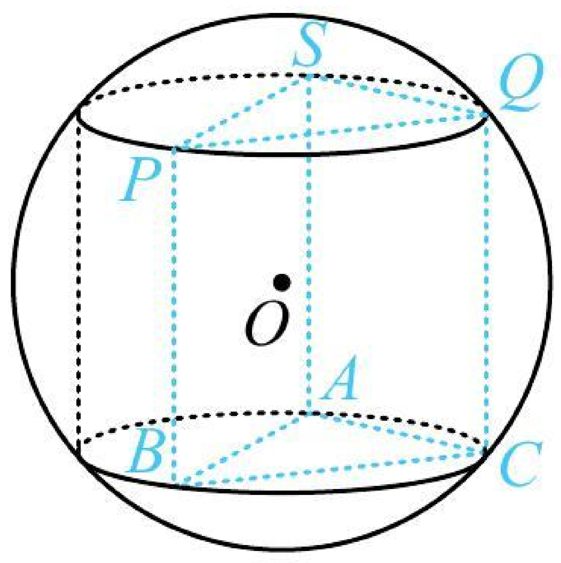


图7

3．圆锥模型：如图 8 和图 9，圆锥的高 $PO_1=h$，底面半径 $AO_1=r$，球的半径为 R，则 $OO_1=|h-R|$，在 ΔAOO_1 中，有 $|h-R|^2+r^2=R^2$，故圆锥的外接球相关计算抓住 ΔAOO_1 即可．除了标准的圆锥模型，对于侧棱相等的棱锥，也可放到圆锥中考虑，如图 10 的三棱锥 $P-ABC$.

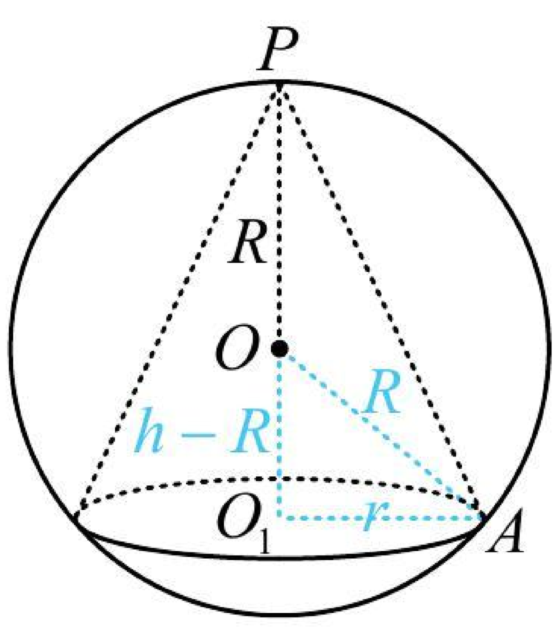


图8

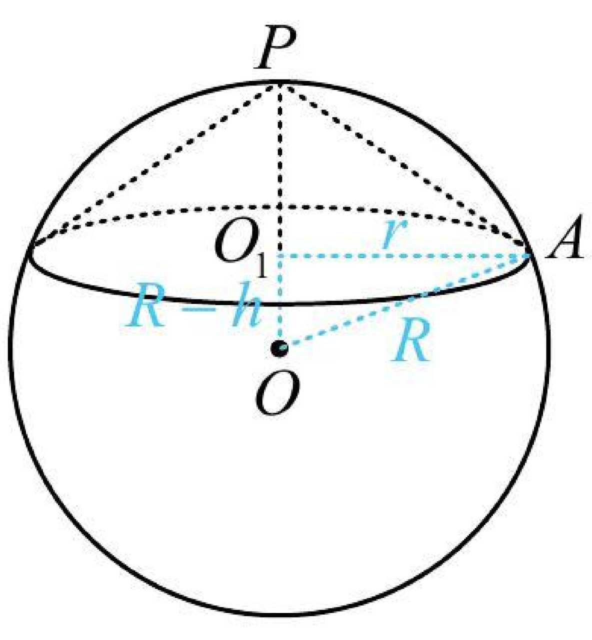


图9

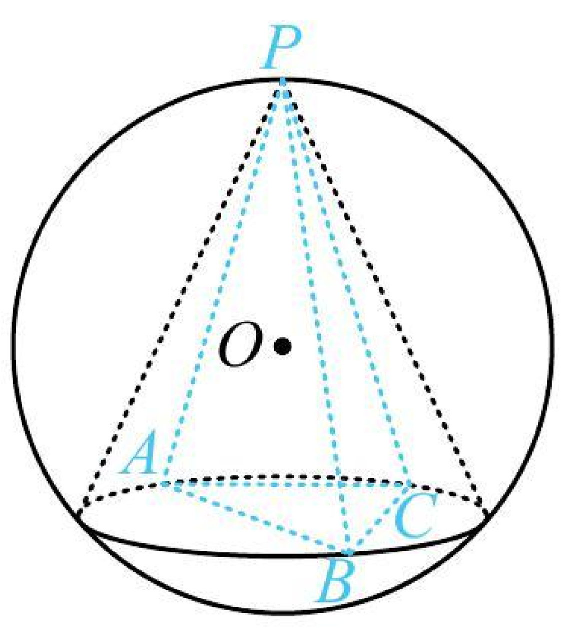


图10

4．台体模型：如图 11，圆台的上、下底面半径分别为r_1，r_2，高$O_1O_2=h$，球 O 的半径为 R，则它们满足方程$\sqrt{R^2-r_1^2}+\sqrt{R^2-r_2^2}=h$；若为图 12，则满足的方程是$\sqrt{R^2-r_1^2}-\sqrt{R^2-r_2^2}=h$. 除了这两种标准的圆台模型外，棱台模型也可转化为圆台模型处理，如图 13，这种情况只需求出棱台的上、下底面外接圆半径，即可放入圆台分析.

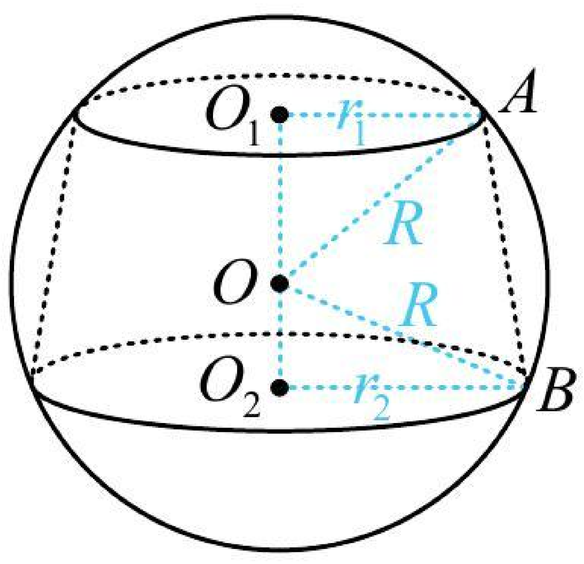


图11

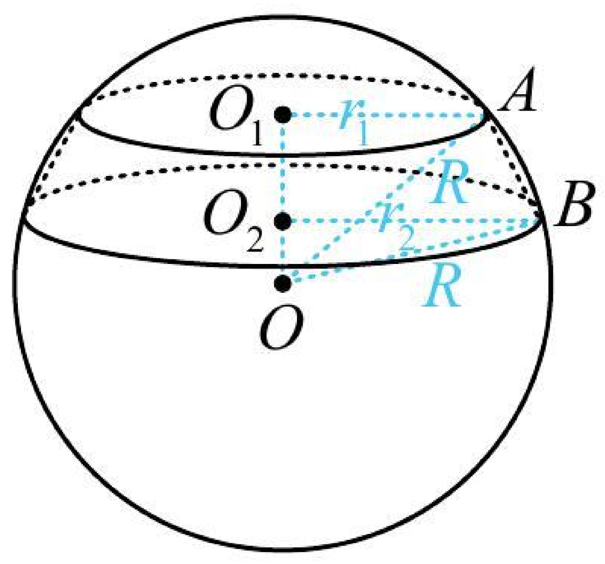


图12

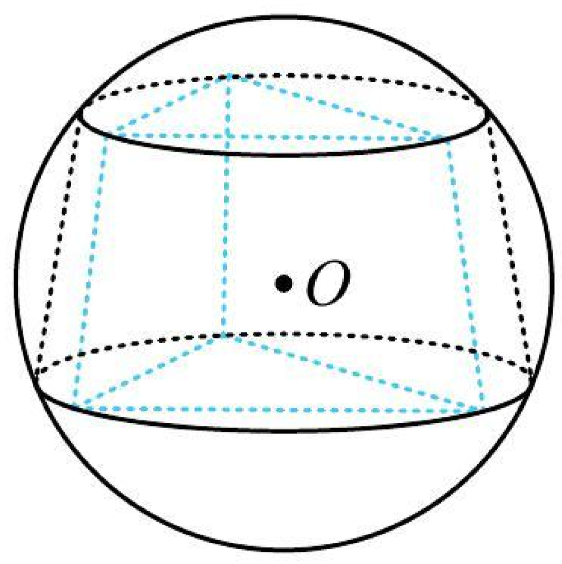


图13

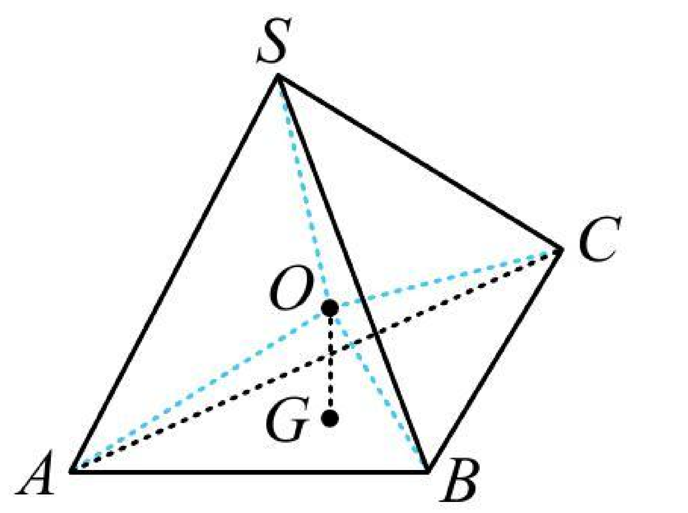


图14

在外接球问题中，若看不出来是什么模型，则可以尝试用通法：先找到某个面的外接圆圆心，过圆心作该面的垂线，则球心必定在该垂线上，再利用球心到各顶点距离相等构造方程. 如上图 14，过ΔABC的外心 G 作平面 ABC 的垂线，则球心 O 必在该垂线上，再由$OS=OA$建立方程求三棱锥$S-ABC$的外接球半径. 仔细思考便可发现，其实上述 2，3，4 模型本质上都是利用的该方法，只是将几何体的结构类型进行了细分，更方便大家理解而已. 注意：虽然此通法理论上适用于所有外接球问题，但只有圆心好找且垂线易作时才方便使用.

典型例题

类型Ⅰ：外接球的长方体模型

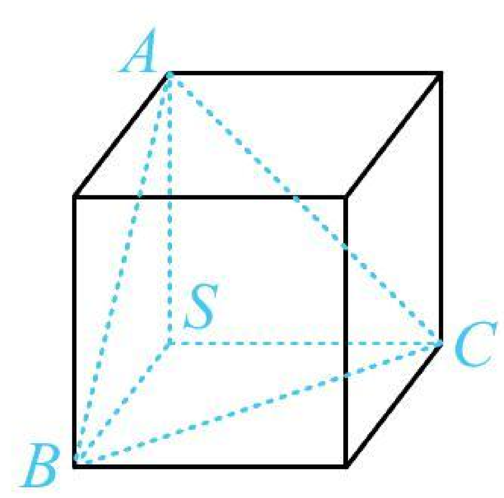
【例 1】若三棱锥的三个侧面两两垂直，且侧棱长均为$\sqrt{3}$，则其外接球的表面积是_____.

解析：如图，三棱锥的三个侧面两两垂直$\Rightarrow$该三棱锥的三条侧棱两两垂直，

由此可看出属于内容提要第 1 点①中的长方体模型，

$SA=SB=SC=\sqrt{3}\Rightarrow$外接球半径$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2+SB^2+SC^2}=\dfrac{3}{2}$，表面积$S=4\pi R^2=9\pi$.

答案：9π



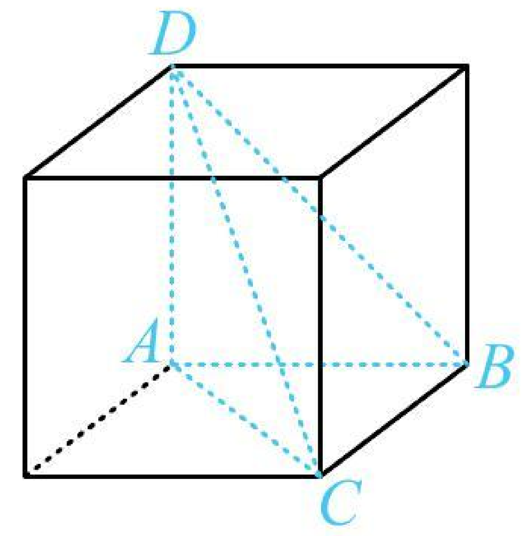
【反思】有三条共顶点且两两垂直的棱的三棱锥是最基础且好发现的墙角模型，该模型可补形为长方体，按长方体算外接球半径.

【变式】已知球 O 的球面上四点 A，B，C，D 满足$DA\perp$平面 ABC，$AB\perp BC$，$DA=AB=BC=\sqrt{3}$，则球 O 的体积为_____.

解析：由$\begin{cases}AB\perp BC\\DA\perp \text{平面}ABC\end{cases}$识别出几何体属于内容提要 1 中的①，可补形为长方体模型处理，

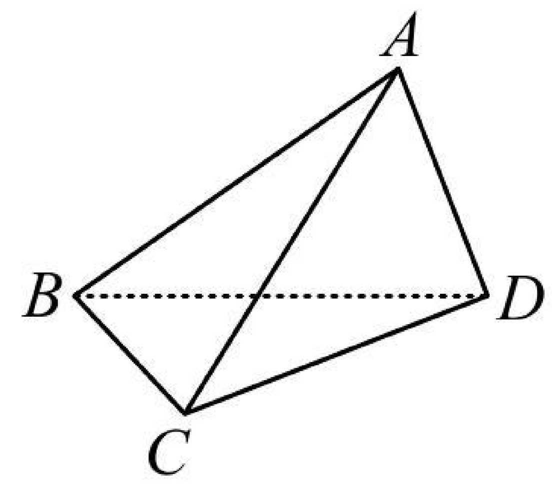
如图，三棱锥 $D-ABC$ 的外接球半径 $R=\frac{1}{2}\sqrt{DA^2+AB^2+BC^2}=\frac{3}{2}\Rightarrow$ 球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{9\pi}{2}$.

答案： $\frac{9\pi}{2}$



【反思】过直角三角形顶点作三角形所在平面的垂线段，这样构成的三棱锥可补形为长方体模型，若把这里面的直角三角形改为非直角三角形呢？此时可按圆柱模型处理.

【例 2】如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=AC=BD=CD=3$，$AD=BC=2$，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为_____.

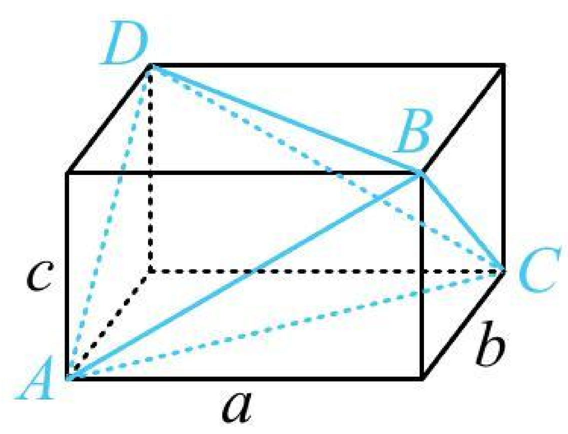


解析： 由所给数据可发现三组对棱长度分别相等，属内容提要第 1 点中的②，可放入长方体考虑，

如图，设长方体的长、宽、高分别为 a，b，c，则 $\begin{cases}AB=CD=\sqrt{a^2+c^2}=3\\AD=BC=\sqrt{b^2+c^2}=2\\AC=BD=\sqrt{a^2+b^2}=3\end{cases}$，

三式平方相加得 $a^2+b^2+c^2=11$，故外接球半径 $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$，表面积 $S=4\pi R^2=11\pi$.

答案： 11π



类型Ⅱ：外接球的圆柱模型

【例 3】已知圆柱的两个底面的圆周都在表面积为 8π 的球面上，若该圆柱的高是底面半径的 2 倍，则该圆柱的侧面积为_____.

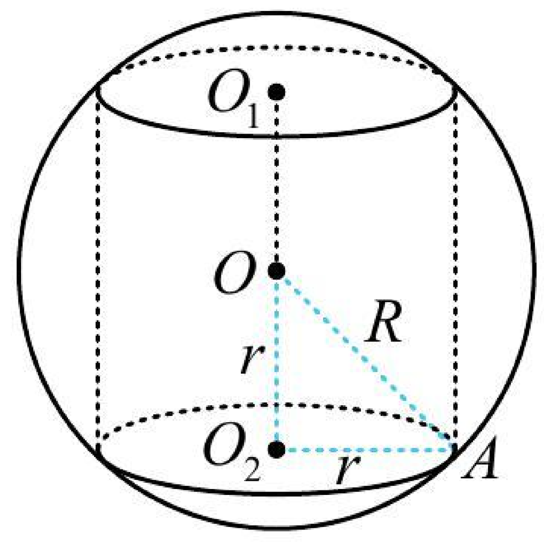
解析： 如图，设球 O 的半径为 R，则其表面积 $S=4\pi R^2=8\pi\Rightarrow R=\sqrt{2}$，

涉及圆柱的外接球，可在 ΔAOO_2 中由勾股定理沟通 r，h，R，核心方程是 $r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2$，

由题意，圆柱的高是底面半径的 2 倍，所以 $h=2r$，代入 $r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2$ 可得 $r^2+r^2=R^2$，

所以 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}R=1$，故该圆柱的侧面积为 $2\pi rh=4\pi r^2=4\pi$.

答案： 4π



【变式 1】已知在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=4$，$BC=2\sqrt{6}$，$PB=PC=3$，$PA\perp$ 平面 PBC，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积是_____.

解析： 条件中有 $PA\perp$ 面 PBC，且 ΔPBC 不是直角三角形，如图 1，这是内容提要第 2 点中①的三棱锥转圆柱模型，如图 2，模型的核心方程是 $r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2$，故先求 r，可用正弦定理求，

设 ΔPBC 的外接圆半径为 r，$\cos\angle BPC=\frac{PB^2+PC^2-BC^2}{2PB\cdot PC}=-\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\angle BPC=\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

由正弦定理，$\frac{BC}{\sin\angle BPC}=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=3\sqrt{3}=2r$，所以 $r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

又 $\frac{h}{2}=OO_1=\frac{1}{2}PA=2$，所以 $R=\sqrt{r^2+(\frac{h}{2})^2}=\sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+2^2}=\frac{\sqrt{43}}{2}\Rightarrow$ 球 O 表面积 $S=4\pi R^2=43\pi$.

答案： 43π

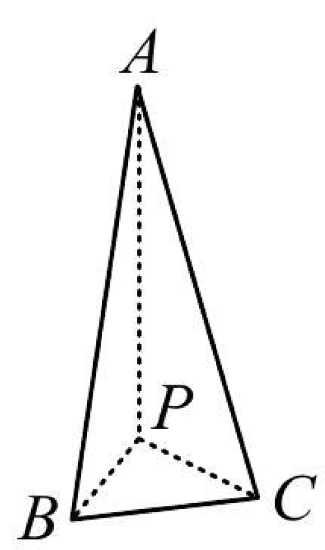


图1

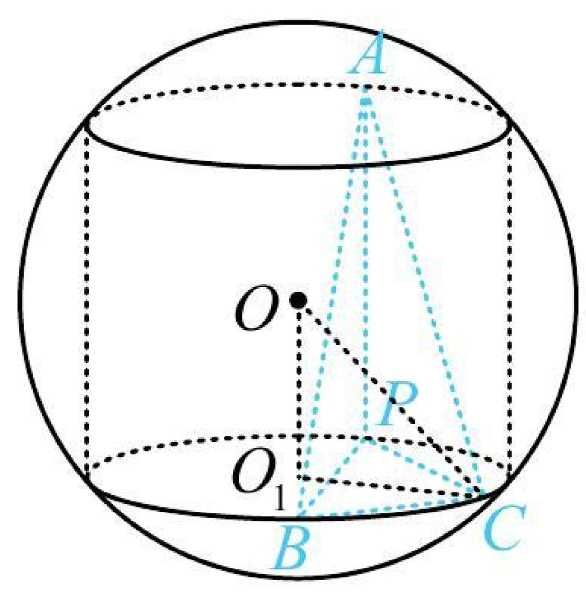
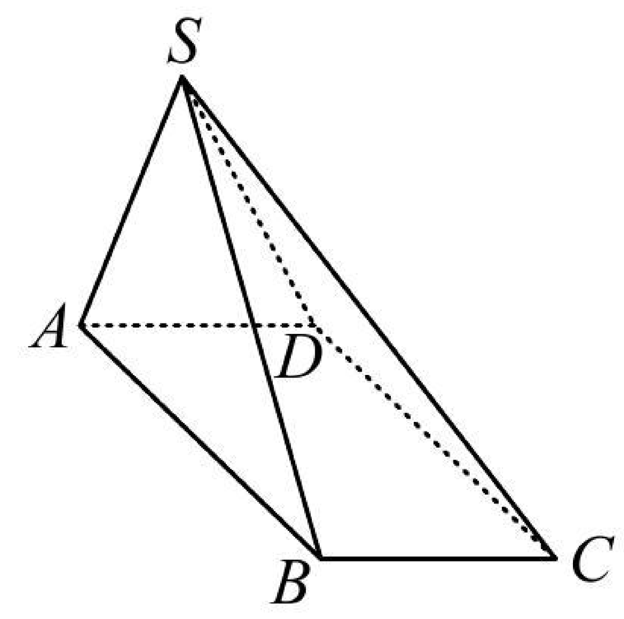


图2

【变式 2】如图，已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，$SA\perp AB$，$SB=SC=2$，$SA=AD=1$，则四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球的表面积为（　　）

（A）$\frac{13\pi}{3}$　　（B）4π　　（C）$\frac{10\pi}{3}$　　（D）3π



解法 1：涉及四棱锥的外接球，先分析其结构特征，重点看是否有线面垂直，

底面 $ABCD$ 为矩形 $\Rightarrow AB\perp AD$，又 $SA\perp AB$，所以 $AB\perp$ 平面 SAD ①，

有线面垂直，故四棱锥可补全为直三棱柱，按内容提要第 2 点②的圆柱模型处理，

补形过程如图 1，2，3，$\begin{cases}SA\perp AB\\ SA=1\\ SB=2\end{cases}\Rightarrow AB=\sqrt{SB^2-SA^2}=\sqrt{3}\Rightarrow CD=\sqrt{3}$，

由①可得 $AB\perp SD$，又 $CD/\!/AB$，所以 $CD\perp SD$，故 $SD=\sqrt{SC^2-CD^2}=1$，

结合 $SA=AD=1$ 可得 ΔSAD 是边长为 1 的正三角形，其外接圆半径 $r=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $\frac{h}{2}=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $R=\sqrt{r^2+(\frac{h}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{13}{12}}$，故外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{13\pi}{3}$.

解法 2：分析 ΔSAD 为正三角形、$AB\perp$ 平面 SAD 等过程同解法 1. 若没想到上述补形的方法，由于底面矩形的外心好找，也可用内容提要最后提及的通法来处理，

如图 4，设 G 为矩形 $ABCD$ 的中心，过 G 作平面 $ABCD$ 的垂线，则球心 O 在该垂线上，

要求外接圆半径，可利用图中 $OS=OA$ 来建立等量关系，

设 F 是 AD 中点，$OI\perp SF$ 于 I，则 $SF\perp AD$，又 $AB\perp$ 面 SAD，所以 $SF\perp AB$，故 $SF\perp$ 面 $ABCD$，

所以 $SF/\!/OG$，故 $IF=OG$，设 $IF=OG=x$，则 $IS=SF-IF=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$，$OI=FG=\frac{1}{2}CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

设 $OS=OA=R$，在 ΔSOI 中，$IS^2+OI^2=OS^2$，所以 $(\frac{\sqrt{3}}{2}-x)^2+\frac{3}{4}=R^2$ ①，

在 ΔOAG 中，$OG^2+AG^2=OA^2$，所以 $x^2+1=R^2$ ②，

联立①②可解得：$R^2=\frac{13}{12}$，所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{13\pi}{3}$.

答案：A

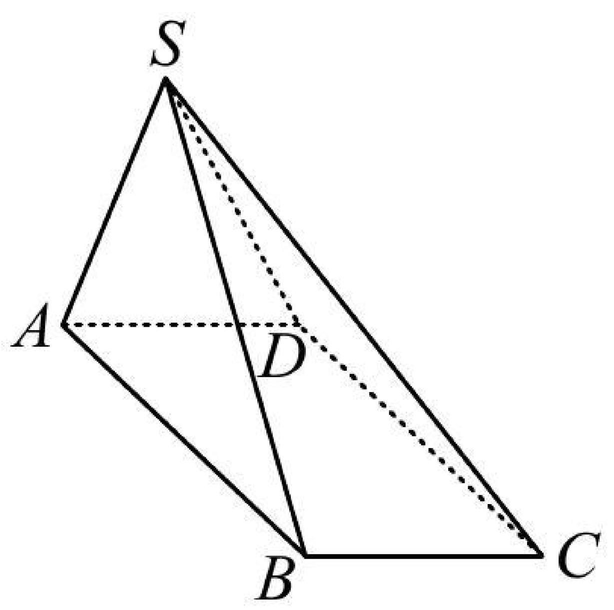


图1

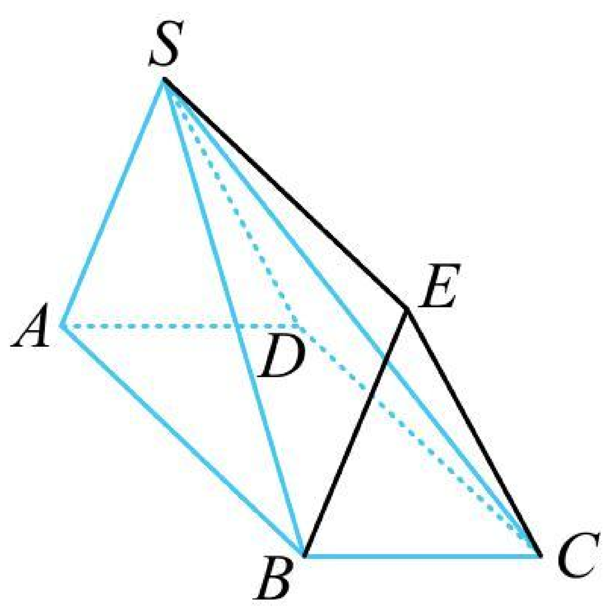


图2

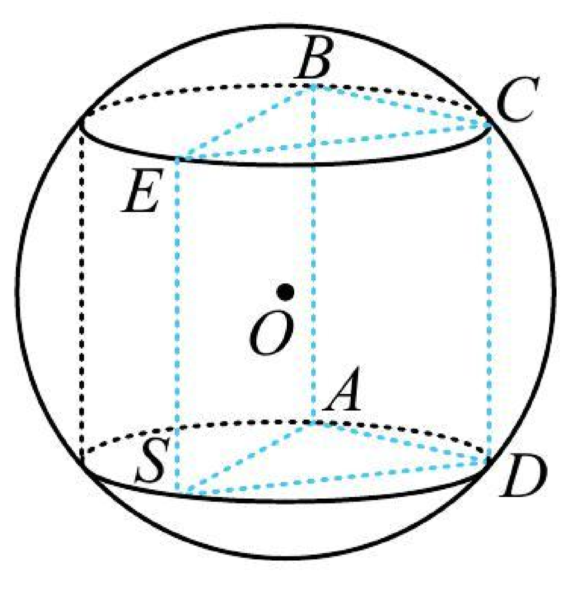


图3

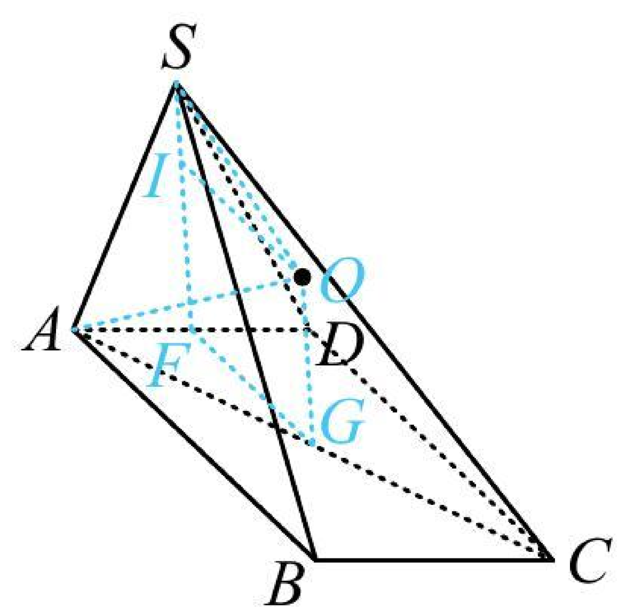


图4

【反思】圆柱模型的标志性条件是线面垂直，若没有观察出模型，也可考虑通法思路. 当涉及面面垂直时，

用通法思路常较简单，如本题的面 $SAD\perp$ 面 $ABCD$.（因此时作垂线，垂足在两面交线上，如 SF）

类型Ⅲ：外接球的圆锥模型

【例 4】一个高为 3，母线长为 $2\sqrt{3}$ 的圆锥的底面圆和顶点都恰好在球 O 的球面上，则该球的表面积为_____.

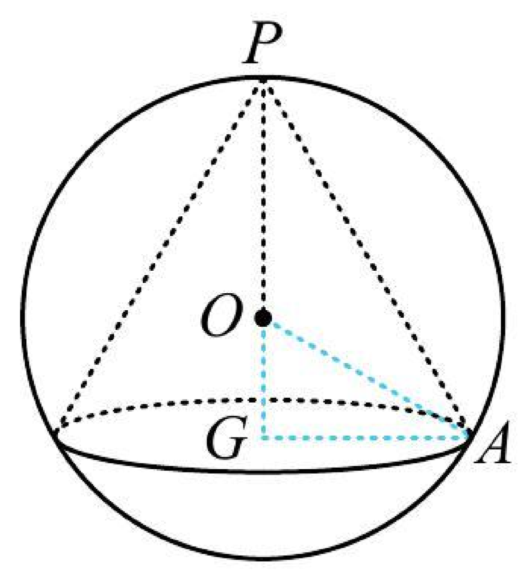
解析：如图，涉及圆锥的外接球计算，到 ΔAOG 中用勾股定理建立方程求解需要的量，

由题意，$PG=3$，$PA=2\sqrt{3}$，所以圆锥的底面半径 $r=AG=\sqrt{PA^2-PG^2}=\sqrt{3}$，

设球 O 的半径为 R，则 $OA=OP=R$，$OG=PG-OP=3-R$，在 ΔAOG 中，$OG^2+AG^2=OA^2$，

所以 $(3-R)^2+3=R^2$，解得：$R=2$，故球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$.

答案：16π



【变式 1】已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 $3\sqrt{2}$，侧棱长为 6，则该四棱锥的外接球的体积为_____.

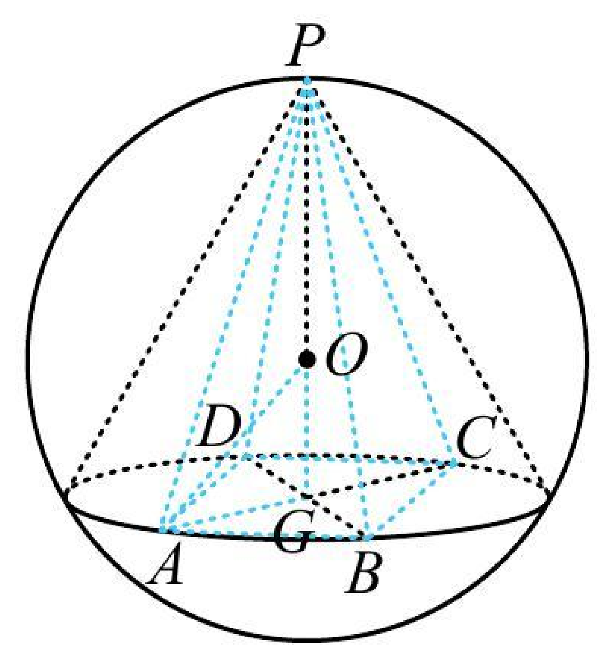
解析：正四棱锥的侧棱长相等，可按圆锥模型处理，如图，核心方程可到 ΔAOG 中由勾股定理建立，

由题意，$AG=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=3$，$PA=6$，$PG=\sqrt{PA^2-AG^2}=3\sqrt{3}$，

设球 O 的半径为 R，则 $OA=OP=R$，$OG=PG-OP=3\sqrt{3}-R$，在 ΔAOG 中，$OG^2+AG^2=OA^2$，

所以 $(3\sqrt{3}-R)^2+9=R^2$，解得：$R=2\sqrt{3}$，故该四棱锥的外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=32\sqrt{3}\pi$.

答案：$32\sqrt{3}\pi$



【反思】侧棱相等的棱锥都可以按圆锥模型处理，列出核心方程求解；正棱锥的所有侧棱都相等.

【变式 2】已知圆柱的轴截面是边长为 2 的正方形，P 为上底面圆的圆心，AB 为下底面圆的直径，E 为下底面圆周上一点，则三棱锥 $P-ABE$ 外接球的表面积为_____.

解析：如图 1，由题意，$AB=2$，所以 ΔABE 的外接圆半径 $r=1$，三棱锥 $P-ABE$ 的高为 2，

可发现 $PA=PB=PE$，这是侧棱相等的圆锥模型. 把圆锥 PO_1 放入球 O，如图 2，再到 ΔOO_1A 中分析，

设外接球的半径为 R，则 $OA=OP=R$，$OO_1=PO_1-OP=2-R$，$O_1A=1$，

因为 $OO_1^2+O_1A^2=OA^2$，所以 $(2-R)^2+1=R^2$，解得：$R=\dfrac{5}{4}$，故外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\dfrac{25\pi}{4}$.

答案： $\dfrac{25\pi}{4}$

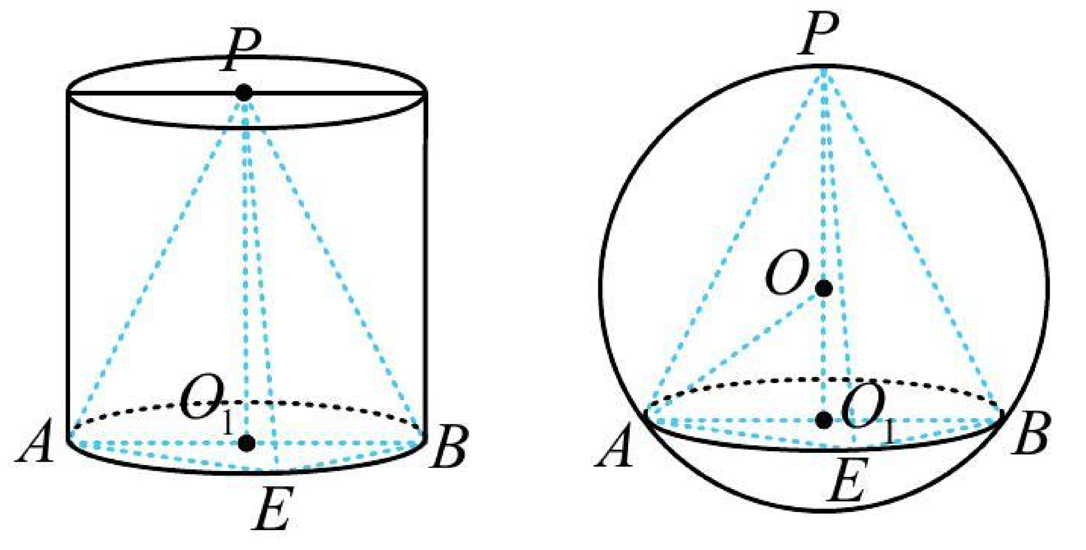


图1　　图2

类型Ⅳ：外接球的台体模型

【例 5】（2022·新高考Ⅱ卷）已知正三棱台的高为 1，上下底面的边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

（A）100π　　（B）128π　　（C）144π　　（D）192π

解析： 棱台的上、下底面半径分别为 $KA_1=3\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=3$，$GA=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=4$，高 $KG=1$，

我们发现棱台的高相对于上、下底的半径较小，故可猜想外接球是图 1 所示的情形，先按图 1 计算，

如图 1，应有 $OK-OG=\sqrt{OA_1^2-KA_1^2}-\sqrt{OA^2-AG^2}=\sqrt{R^2-9}-\sqrt{R^2-16}=1$，

所以 $\sqrt{R^2-9}=\sqrt{R^2-16}+1$，同时平方可得 $R^2-9=R^2-16+2\sqrt{R^2-16}+1$，

化简得：$\sqrt{R^2-16}=3$，解得：$R=5$，所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=100\pi$，故选 A；

再来分析图 2 的情形，其实这种情况是不可能的，我们可以到截面 AA_1KG 中来分析，

若为图 2，则 $OA_1=\sqrt{A_1K^2+OK^2}=\sqrt{9+OK^2}\le\sqrt{9+KG^2}=\sqrt{10}$，

而 $OA=\sqrt{AG^2+OG^2}=\sqrt{16+OG^2}\ge 4$，所以 $OA>OA_1$，与 $OA=OA_1$ 矛盾，故不可能是图 2 的情形.

答案： A

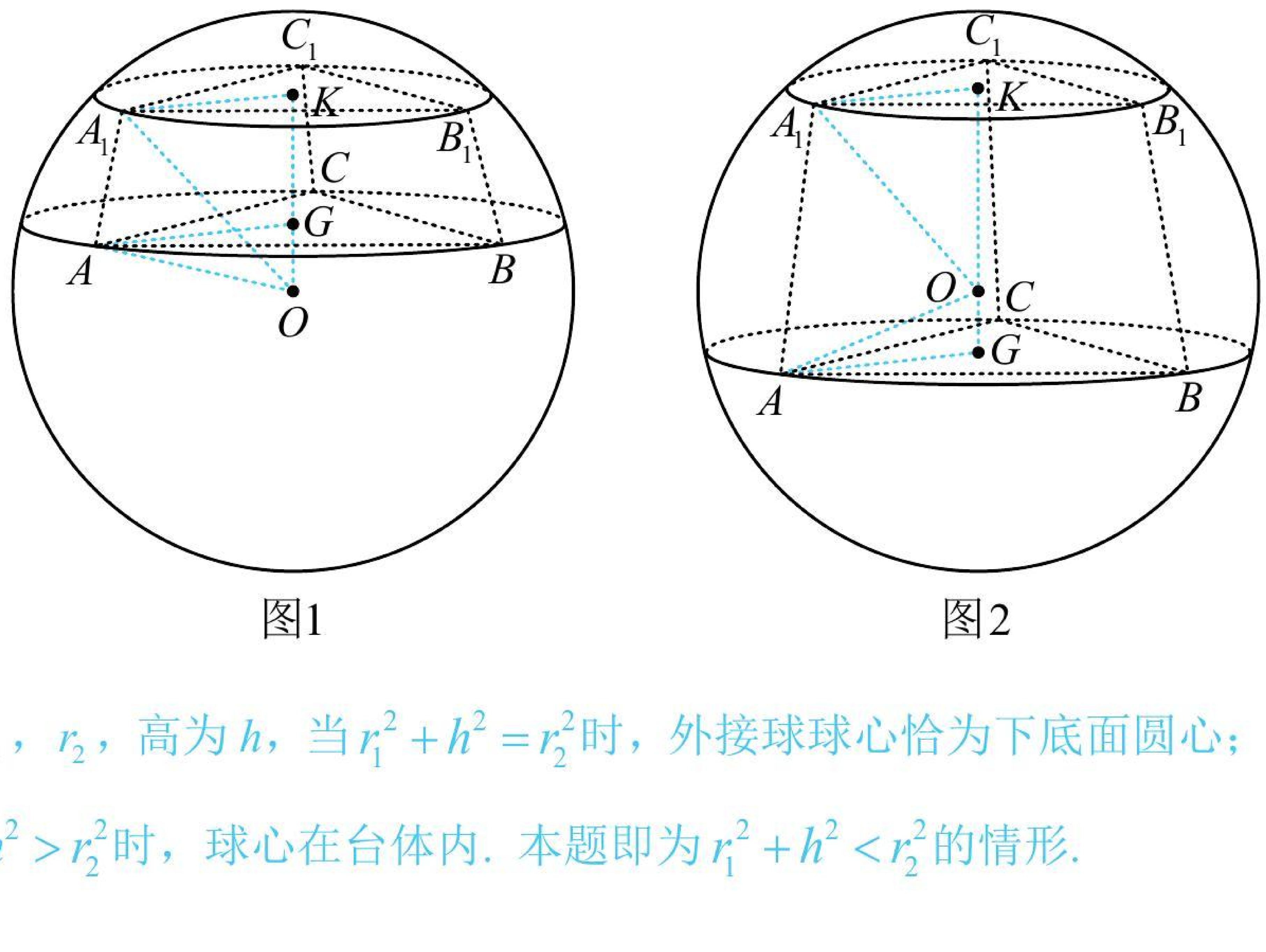


图1　　图2

【反思】设圆台的上、下底面半径分别为 r_1，r_2，高为 h，当 $r_1^2+h^2=r_2^2$ 时，外接球球心恰为下底面圆心；当 $r_1^2+h^2<r_2^2$ 时，球心在台体外；当 $r_1^2+h^2>r_2^2$ 时，球心在台体内. 本题即为 $r_1^2+h^2<r_2^2$ 的情形.

强化训练

1．（2023 • 全国模拟 • ★）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $AA_1=2$，其外接球的体积为 36π，则此长方体的表面积为（　　）

（A）34　（B）64　（C）$4\sqrt{17}+17$　（D）$8\sqrt{17}+34$

2．（2023 • 天津模拟 • ★）已知正三棱锥 $S-ABC$ 的三条侧棱两两垂直，且侧棱长为 1，则此三棱锥的外接球的表面积为（　　）

（A）π　（B）3π　（C）6π　（D）9π

3．（★★）已知 A，B，C，D 在同一球面上，$AB\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，若 $AB=3$，$AC=\sqrt{13}$，$BD=\sqrt{7}$，则该球的体积是_____.

4．（2014 • 大纲卷 • ★★）正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为 4，底面边长为 2，则该球的表面积为（　　）

（A）$\frac{81\pi}{4}$　（B）16π　（C）9π　（D）$\frac{27\pi}{4}$

5．（2023 • 河南郑州模拟 • ★★）已知圆柱的高为 2，侧面积为4π，若该圆柱的上、下底面圆周都在某一球的球面上，则该球的体积为（　　）

（A）$\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$　（B）$\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$　（C）$4\sqrt{2}\pi$　（D）$4\sqrt{3}\pi$

6．（2023 • 全国乙卷 • ★★★）已知点 S，A，B，C 均在半径为 2 的球面上，ΔABC 是边长为 3 的等边三角形，$SA\perp$平面 ABC，则 $SA=$_____.

7．（2023 • 河南模拟 • ★★★）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，ΔABC 是边长为 6 的等边三角形，D 是 AB 的中点，DC_1 与平面 ABC 所成角的正切值为 1，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为（　　）

（A）75π　（B）68π　（C）60π　（D）48π

8．（2023 • 山东烟台模拟 • ★★★）已知圆锥的侧面积为$4\sqrt{3}\pi$，高为$2\sqrt{2}$，若圆锥可在某球内自由运动，则该球的体积的最小值为（　　）

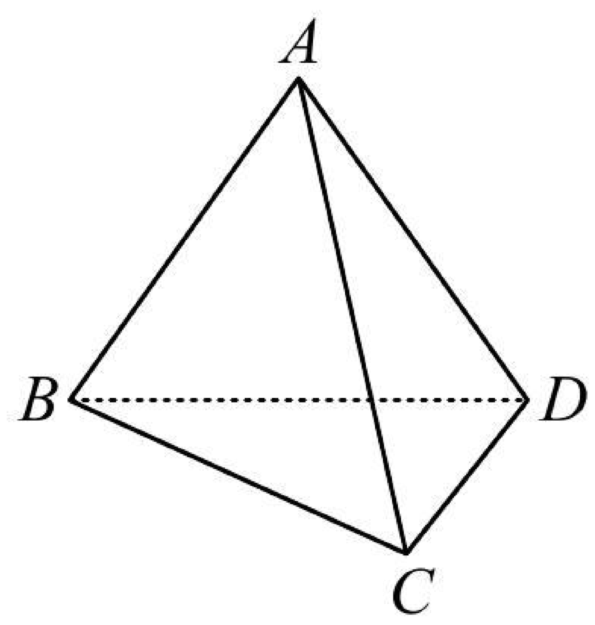
（A）$8\sqrt{2}\pi$　（B）8π　（C）9π　（D）$9\sqrt{2}\pi$

9.（2022 •安徽模拟 •★★★）在正三棱锥$S-ABC$中，$AB=BC=CA=6$，D是SA的中点，若$SB\perp CD$，则该三棱锥的外接球的表面积是_____.

10.（2022 •福建模拟 •★★★★）若正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的各顶点都在表面积为65π的球O的球面上，$AB=4\sqrt{3}$，$A_1B_1=2\sqrt{3}$，则正三棱台的高为（　）

（A）$\sqrt{3}$　（B）4　（C）$\sqrt{3}$或3　（D）3或4

11.（2023 •贵州贵阳模拟 •★★★★）如图，在三棱锥$A-BCD$中，平面$ABD\perp$平面BCD，ΔBCD是边长为6的等边三角形，$AB=AD=3\sqrt{3}$，则该几何体的外接球表面积为_____.



答